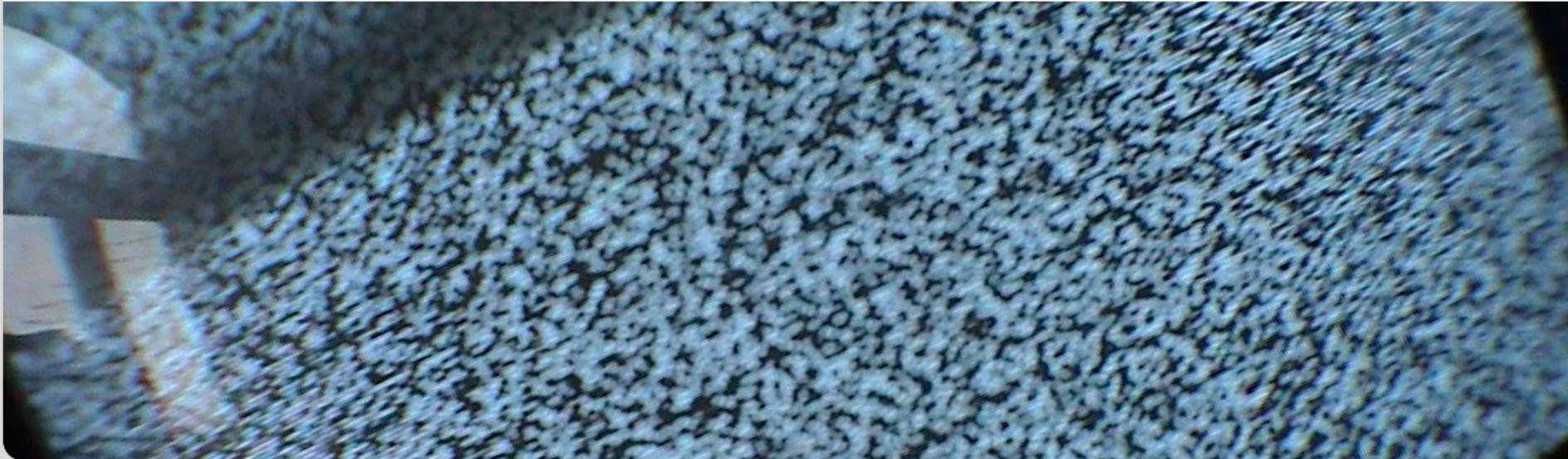


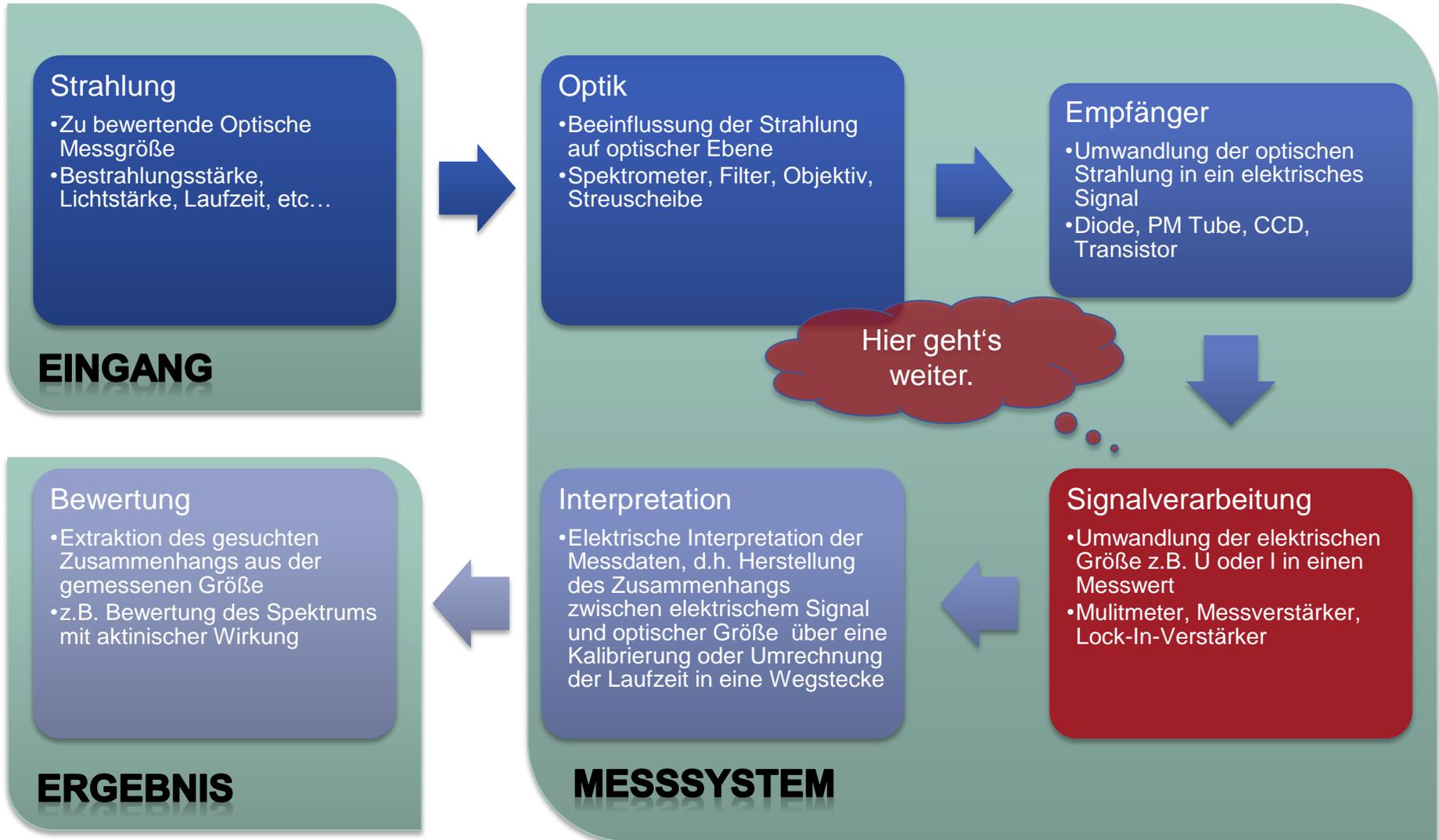
Optoelektronische Messtechnik

Vorlesung | Nr. 9
Rauschen

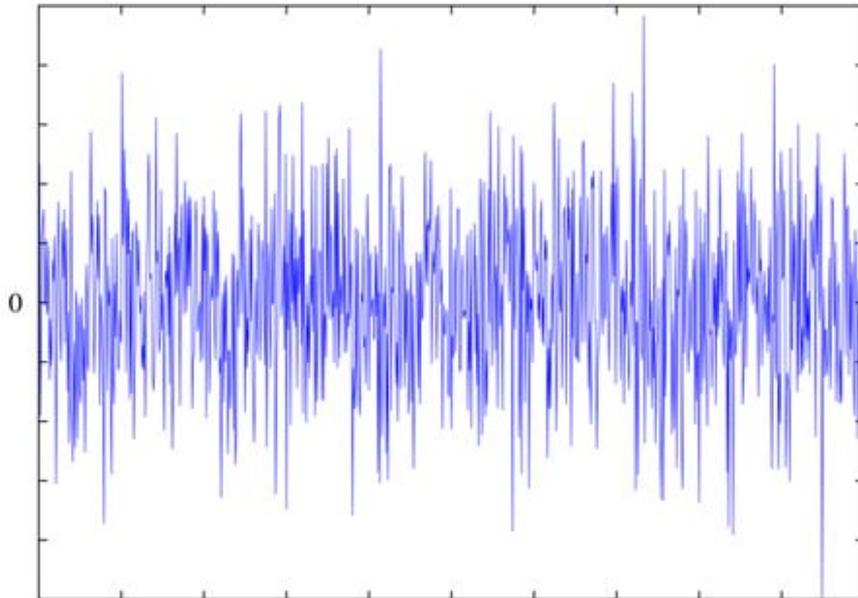
LTI | Lichttechnisches Institut



Prinzipieller Aufbau eines Messsystems



Rauschen - Motivation



Wer erkennt ein Signal?

Ab wann erkenne ich was?

Signal \geq Rauschen

\Rightarrow SNR > 1

Rauschen begrenzt die

- Nachweisgrenze
- Messempfindlichkeit
- Auflösung
- Unsicherheit (Fehler)

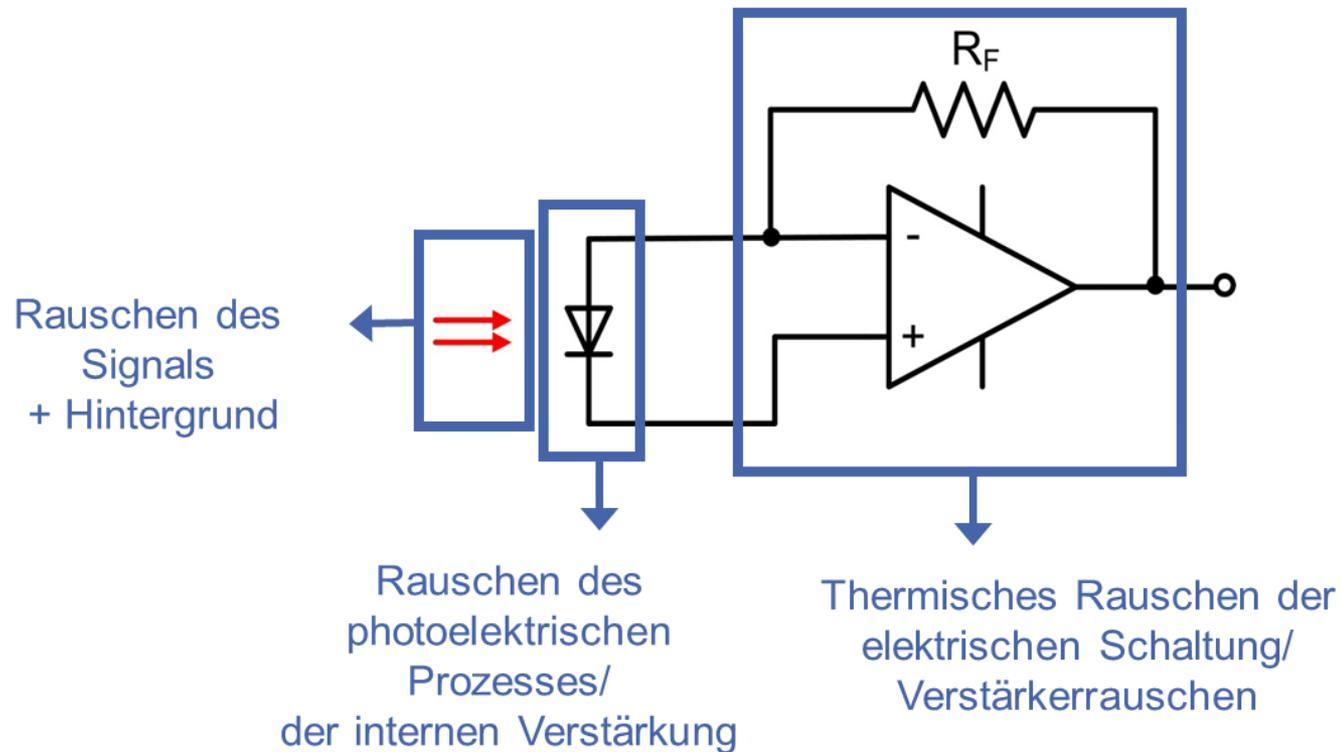
Rauschquellen

■ Was kann Rauschen?

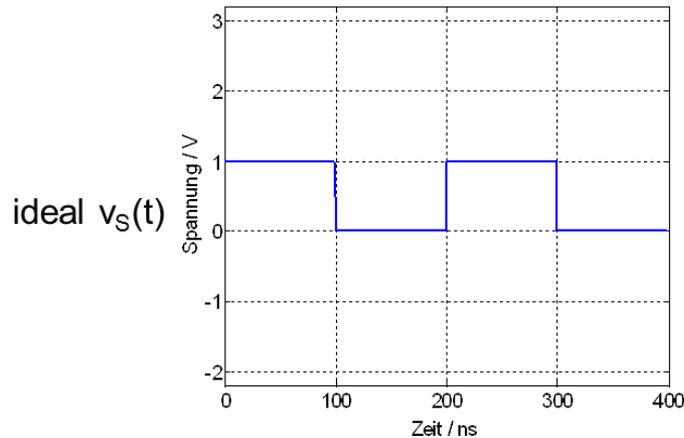
Signal

Empfänger

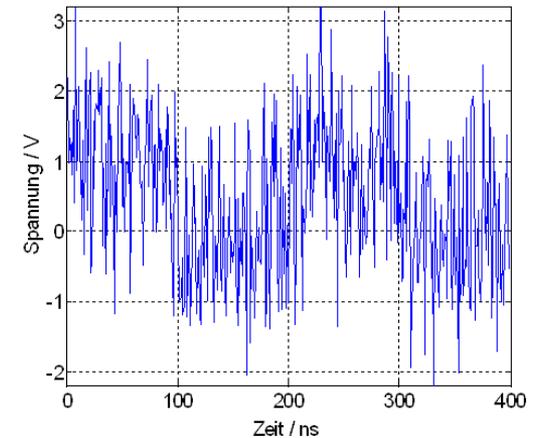
Verstärker



Beschreibung des Rauschens



real $v_S(t) + v_R(t)$



- Wie beschreibt man Rauschen in optoelektronischen Systemen?
- Welche Rauschquellen gibt es?
- Was beschränkt die Messempfindlichkeit?
- Wie wählt man einen passenden optischen Detektor in Bezug auf Rauschprobleme?

Beschreibung des Rauschens

Annahme Signal = DC :

Mittelwert des Stromes

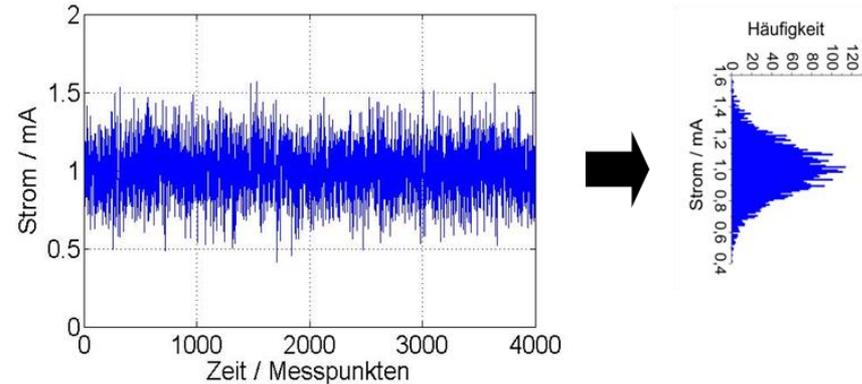
$$\bar{i} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} i(t) dt$$

Mittelwert des überlagerten Rauschens

$$\bar{i}_r = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} (i(t) - \bar{i}) dt = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} i(t) dt - \bar{i} = \bar{i} - \bar{i} = 0$$

Daher Bewertung des Rauschens über Effektivwert

$$i_{r,eff} = \sqrt{\frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} (i_r(t))^2 dt}$$



$$\bar{i}_{Mess} = i_{ein}$$

$$\text{Var}(i_{Mess}) = i_r^2$$

$$\rightarrow i_{eff} = \sqrt{i_r^2}$$

Standardabweichung/Effektivwert als charakteristischer Wert für Rauschen (typischerweise angegeben in A/\sqrt{Hz})

Rauschen - Grundgrößen

$$\text{SNR} = \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Rauschsignalleistung}} = \frac{P_S}{P_R} \quad \text{SNR}|_{\text{dB}} = 10 \cdot \lg\left(\frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Rauschsignalleistung}}\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_S}{P_R}\right)$$

Ziel beim Auslegen von Messsystemen:
„Signal-zu-Rauschverhältnis“ (SNR) maximieren

NEP : „Noise equivalent power“: Signalleistung, die bei einem bestimmten Detektor zu $\text{SNR} = 1$ führt (abhängig von Signalbandbreite –wellenlänge uvm.)

D = 1/NEP : Detektivität, häufig auch als spezifische Detektivität D^* in Verwendung, dann normiert auf Bandbreite Δf und Detektorfläche A $D^* = \frac{\sqrt{\Delta f \cdot A}}{\text{NEP}}$

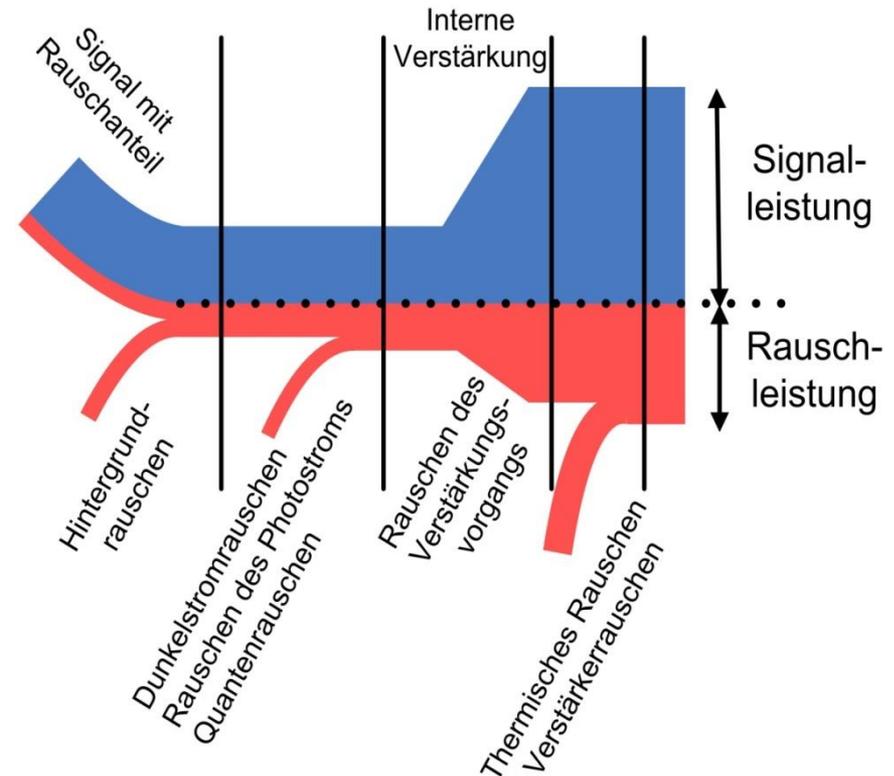
Die effektiven Leistungen unabhängiger Rauschquellen können addiert werden zu einer effektiven Gesamtrauschleistung.

$$i_{\text{eff, Ges}} = \sqrt{i_{\text{eff,1}}^2 + i_{\text{eff,2}}^2 + i_{\text{eff,3}}^2 + \dots}$$

Rauschquellen

Was rauscht?

- Schwankung des Signals (z.B. 50Hz)
- Schrotrauschen
- Quantenrauschen des Signals
- Hintergrund des Signals
- Dunkelstrom des Empfängers
- Rauschen des Verstärker (-widerstandes)



Arten des Rauschens

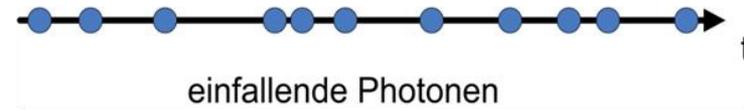
Art des Rauschens	Betroffene Detektoren	Physikalischer Mechanismus
Schrotrauschen <i>Shot noise</i>	Thermische & Quantendetektoren	Stochastische Emission oder Generation von Elektronen (Grenzflächeneffekt)
Johnson Rauschen <i>thermal or Johnson noise</i>	Alle Detektoren	Thermische Generation von Ladungsträgern
Funkelrauschen oder 1/f Rauschen <i>flicker Noise</i>	Thermische	Fluktuation der Austrittsarbeit
Generations-Rekombinationsrauschen	Photoleiter	Statistische Fluktuation der Ladungsträger
Quantenrauschen	Alle Detektoren	Statistische Fluktuation der Photonen

Nachweisgrenze Quantenrauschen

Durch die Teilchennatur des Lichts ist der Lichtstrom (Φ) „körnig“
 → Stetiges Eintreffen einzelner Photonen

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^N \boxed{h\nu} \delta(t - t_j)$$

Energie eines Photons Eintreffen zum Zeitpunkt t_j



➡ Wie groß sind die Fluktuationen des Teilchenstroms?

Auftreffwahrscheinlichkeit ist (in etwa) Poisson-verteilt $p(N) = \frac{(\bar{N})^N}{N!} e^{-\bar{N}}$ \bar{N} : mittlere Photonenzahl

Rauschen ist Varianz der Poisson-Verteilung → $\sqrt{\bar{N}}$ für den Mittelwert \bar{N}

➡ Optimales $SNR = \frac{(\bar{N})^2}{(\sqrt{\bar{N}})^2} = \bar{N}$ aufgrund von Fluktuationen im einfallenden Signal.

Quantenrauschen legt das unterste Limit für die Empfindlichkeit eines Detektors fest.
 Solche Systeme heißen „Signal fluctuation limited“ (SFL).

Rauschäquivalenzleistung bei QR

Rauschäquivalente („kleinste“) einfallende Strahlungsleistung für alleiniges Quantenrauschen: $NEP=SFL$, gegeben durch die Bedingung für die Nachweisgrenze:

$$NEP = \bar{N} \frac{h\nu}{T} = SFL \quad \longrightarrow \quad \text{Minimal für } \bar{N}=1$$

Leistung eines Photons im Zeitfenster T

Wegen der Signaldrift und zur Anhebung des Signal-Rauschverhältnisses wird i. d. R. das Detektorsignal moduliert und nach Frequenzfilterung innerhalb einer Modulations-übertragungsbandbreite Δf empfangen.

$$\Delta f = \frac{1}{2T} \quad \text{Zusammenhang zwischen der Leistungsbandbreite } \Delta f \text{ eines integrierenden elektrischen Filters und der Filterzeitkonstanten } T$$

Folglich:
$$SFL = 2 \frac{h \cdot c \cdot \Delta f}{\lambda}$$

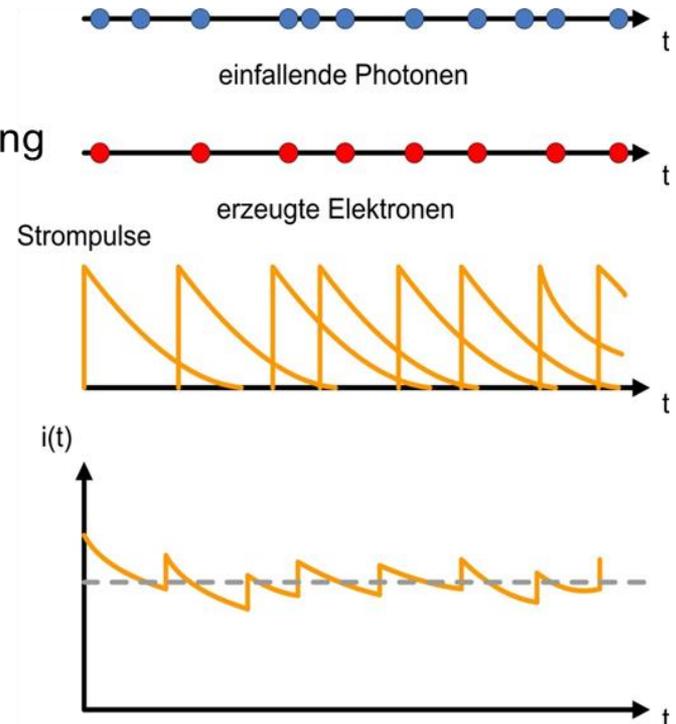
Gegenmaßnahmen: Fast keine (Manipulation der Photonenstatistik).

Schrotrauschen

Der Photostrom besteht aus einzelnen Elektronen, die ebenfalls eine statistische Verteilung aufweisen → Abweichungen vom Mittelwert treten auf, das sogenannte **Schrotrauschen**

$$NEP = \frac{\bar{N} h\nu}{\eta T} = SFL$$

Quanteneffizienz der Elektronenerzeugung



Schrotrauschen kann als effektiver Strom angegeben werden. Schrotrauschen ist ein weißer Rauschprozess.

Δf : Bandbreite

i_{ph} : Photostrom

$$\overline{i_{r,ph}^2} = 2q \cdot \Delta f \cdot i_{ph}$$

Gegenmaßnahmen: Bandbreitebegrenzung

Auch der Dunkelstrom i_d trägt zum Schrotrauschen bei.

$$\overline{i_{r,d}^2} = 2q \cdot \Delta f \cdot i_d$$

Gegenmaßnahmen: Dunkelstrom verringern

Rauschen der internen Verstärkung

In Empfängern mit interner Verstärkung (APD, PMT...) wird nicht nur das Rauschen des Eingangssignals verstärkt, sondern u.U. zusätzliches Rauschen eingeführt.

Das Verstärkungsrauschen wird charakterisiert durch den Zusatzrauschfaktor F_M

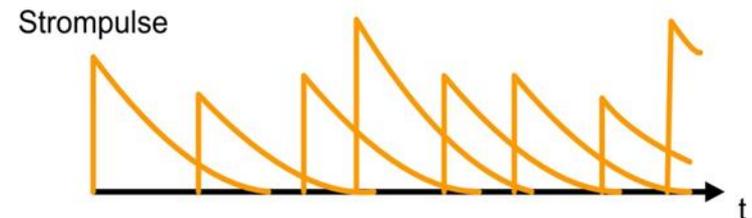
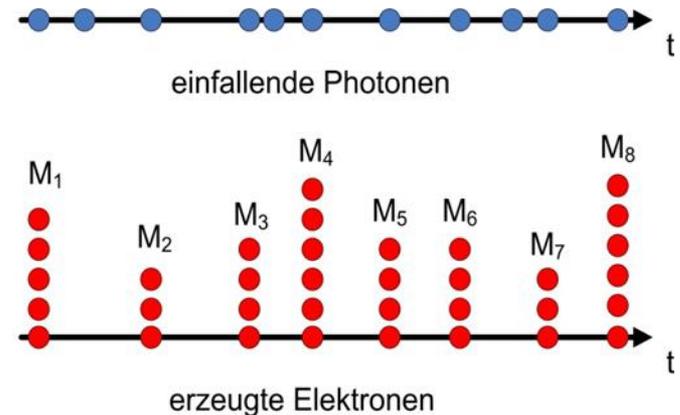
$$F_M = \frac{\overline{M^2}}{\overline{M}^2} = \frac{\overline{M^2}}{M_0^2} = 1 + \frac{\overline{\delta M^2}}{M_0^2}$$

M : Verstärkung
 M_0 : mittlere Verstärkung

Daraus folgt für das Schrotrauschen des Detektors:

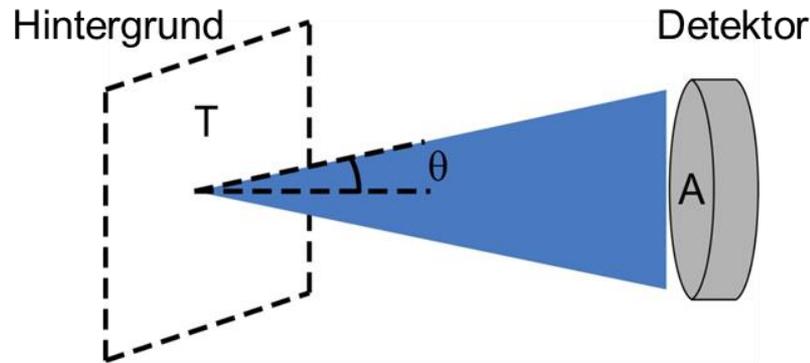
$$\overline{i_{r,M}^2} = M_0^2 \cdot F_M \cdot i_{ph} = 2q \cdot \Delta f \cdot M_0^2 \cdot F_M \cdot i_{ph}$$

Gegenmaßnahmen: Bessere Kontrolle des Verstärkungsprozesses, z. B. durch Trennung von Absorptionszone und Lawinenzone in SAGM-APD



BFL – background fluctuation limit

Dem Signal überlagert ist Hintergrundstrahlung, die eine Rauschquelle darstellt.



Modell: Der Detektor sammelt Strahlung eines schwarzen Strahlers aus dem Hintergrund ein, abhängig von seiner Fläche und dem Öffnungswinkel, der Wellenlänge und der Temperatur des Hintergrunds.

➔ **„Background fluctuation limit“ (BFL)** – einfallende Strahlungsleistung von einer mit λ monochromatischen Strahlungsquelle, die dasselbe Ausgangssignal erzeugt wie die Rauschleistung der Hintergrundstrahlung.

Detektor sei aselektiv empfindlich von $\lambda=0$ bis $\lambda=\lambda_c$. Dann ist

$$\text{BFL} = 2 \frac{hc}{\lambda} \sqrt{\frac{\Delta f \cdot A \cdot \pi \cdot kT}{h \cdot \eta}} \exp\left(-\frac{h \cdot c}{2\lambda_c kT}\right) \left[2\left(\frac{kT}{hc}\right)^2 + \frac{2kT}{hc\lambda_c} + \frac{1}{\lambda_c^2} \right]^{1/2} \sin(\theta/2)$$

Thermisches Rauschen

Statistisch ungeordnete thermische Bewegung von Ladungsträgern erzeugt eine fluktuierende räumliche Verteilung der Träger über dem Leitervolumen. (In allen elektronischen Teilen, auch im Verstärker, siehe später)

→ Über dem Leiter entstehen Rauschspannungen; umgesetzt wird dabei nach Nyquist eine Rauschleistung.

$$P_{r,th} = kT \cdot \Delta f \Rightarrow \quad R: \text{Widerstand in Stromrichtung}$$

$$\overline{i_{r,th}^2} = 4kT \cdot \Delta f / R$$

$$\overline{u_{r,th}^2} = 4kT \cdot \Delta f \cdot R$$

Gegenmaßnahmen: Kühlen des Detektors und des Verstärkers sowie Bandbegrenzung

Auch das nicht thermische Rauschen vieler elektronischer Bauelemente wird unter Verwendung eines **Rauschersatzwiderstandes** (im Ersatzschaltbild) durch obige Ausdrücke beschrieben!

Weitere Rauscharten

5a. Funkelrauschen (flicker noise)

Erzeugt durch Leckströme und Potentialbarrieren an der Oberfläche oder Kontakten von Halbleitern (vermutlich, nicht abschließend geklärt). Auch als **1/f-Rauschen** (farbiges Rauschen!) bezeichnet, ist es dominant unterhalb 1 kHz:

$$\overline{i_{r,fl}^2} = \text{const} \frac{i^n}{f^m} \quad n = 0 \dots 2, m = 0,8 \dots 1,5$$

5b. Generations-Rekombinationsrauschen

Nichtgleichgewichtsrauschen (nur bei äußerer Spannung) – entsteht durch die Statistik der Generation und Rekombination von Ladungsträgern in Halbleitern

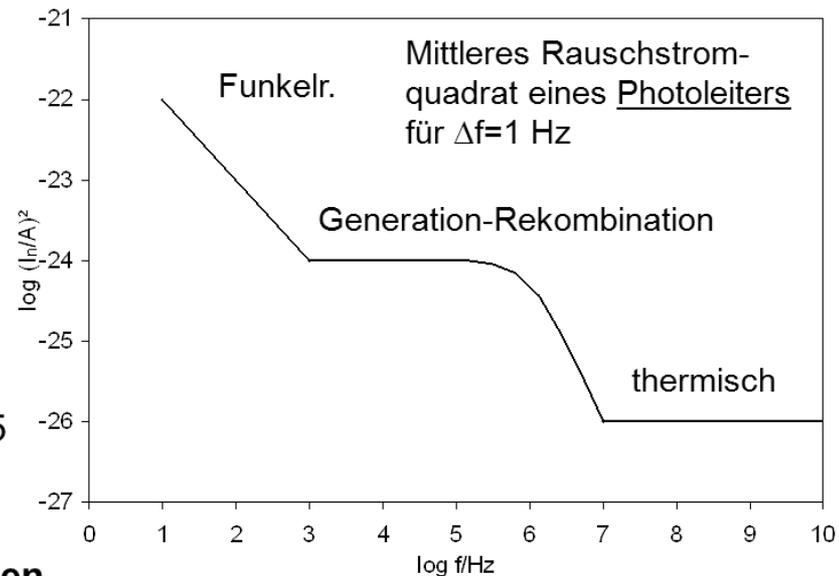
$$\overline{i_{r,gr}^2} = 2q \cdot G \frac{g \cdot \Delta f}{1 + (\omega \cdot \tau_g)^2}$$

G - Gewinn

τ_g – Zeitkonstante der Generation \approx Trägerlebensdauer

g – thermische Generationsrate

Gegenmaßnahmen: Modulation des Signals auf Frequenzen > 1 kHz



Rauschen der Beschaltung

7. Andere Rauscharten

Verstärkerrauschen in den elektronischen Verstärkerblöcken

Rauschen bei digitaler Signalverarbeitung (Quantisierungsrauschen...)

Zusammenfassend (für schrot- und thermisches Rauschen)

$$\frac{S_{\text{Ausgang}}}{S_{\text{r-Ausgang}}} = \frac{i_{\text{ph}}^2}{i_{\text{r,ph}}^2 + i_{\text{r,d}}^2 + i_{\text{r,th}}^2} = \frac{i_{\text{ph}}^2}{2q_M \cdot \Delta f (i_{\text{ph}} + i_d) + 4kT / (R_L + R_{\text{äq}})}$$

Für pin-Diode

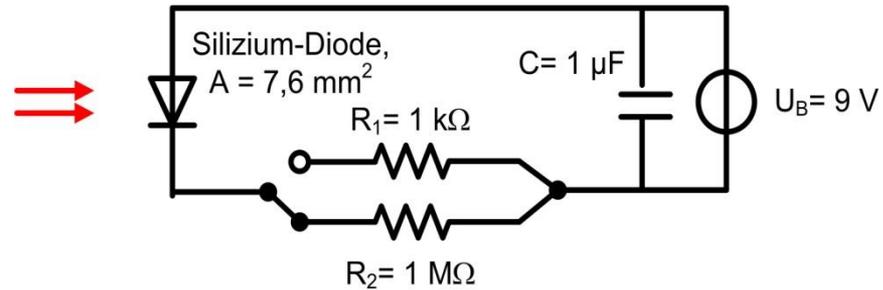
$$q_M = \begin{cases} e \\ e \cdot M_0^2 \cdot F_M \end{cases}$$

Für APD, PM

$$\boxed{\text{NEP} = \frac{h \cdot c \cdot \Delta f}{\eta \cdot \lambda} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2q_M \cdot i_d + 4kT / (R_L + R_{\text{äq}})}{q_M^2 \Delta f}} \right]} \rightarrow \text{SFL}$$

für $T \rightarrow 0$ K und verschwindenden Dunkelstrom

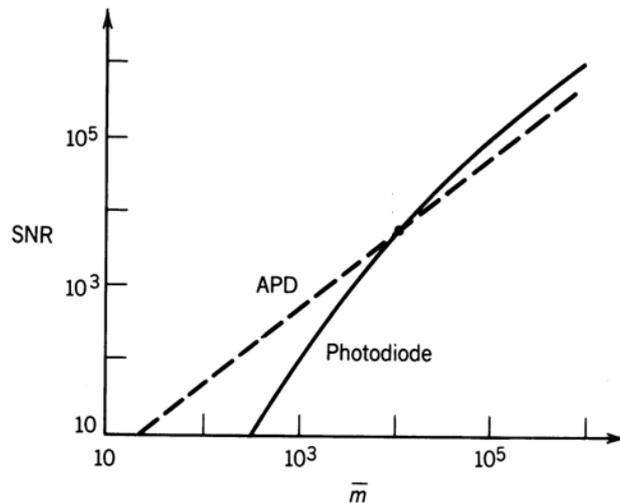
Rauschen einer Beispielschaltung



1 μA Photostrom 20 MHz Bandbreite	1 kΩ Last	1 MΩ Last
Durchschnittliche Signalspannung	1 mV	1 V
Dunkelspannung	30 μV	30 mV
Thermisches Rauschen der Last	18 $\mu\text{V rms}$	0,56 mV rms
Schrotrauschen des Photostroms	2,5 $\mu\text{V rms}$	0,44 mV rms
Schrotrauschen des Leckstroms	0,44 $\mu\text{V rms}$	2,5 mV rms
Gesamtrauschen	18,3 $\mu\text{V rms}$	2,6 mV rms
SNR	55	385

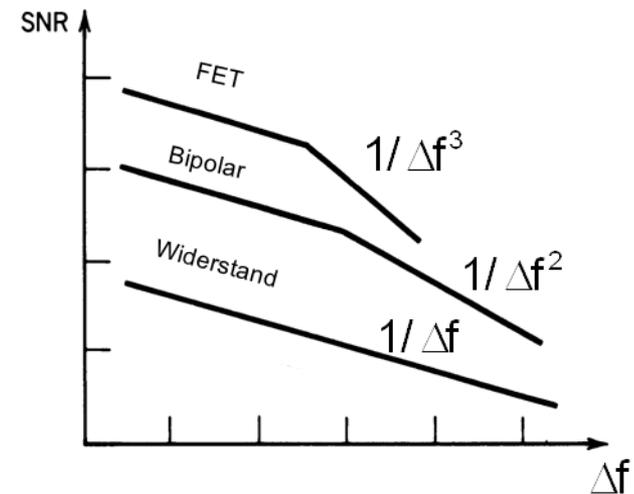
Rauschen im verstärktem System

SNR als Funktion der durchschnittlichen Photoelektronenzahl \bar{m} pro Detektionsintervall für eine Photodiode und eine APD mit durchschnittlichem Gewinn $G=100$ und Zusatzrauschfaktor $F_M=2$



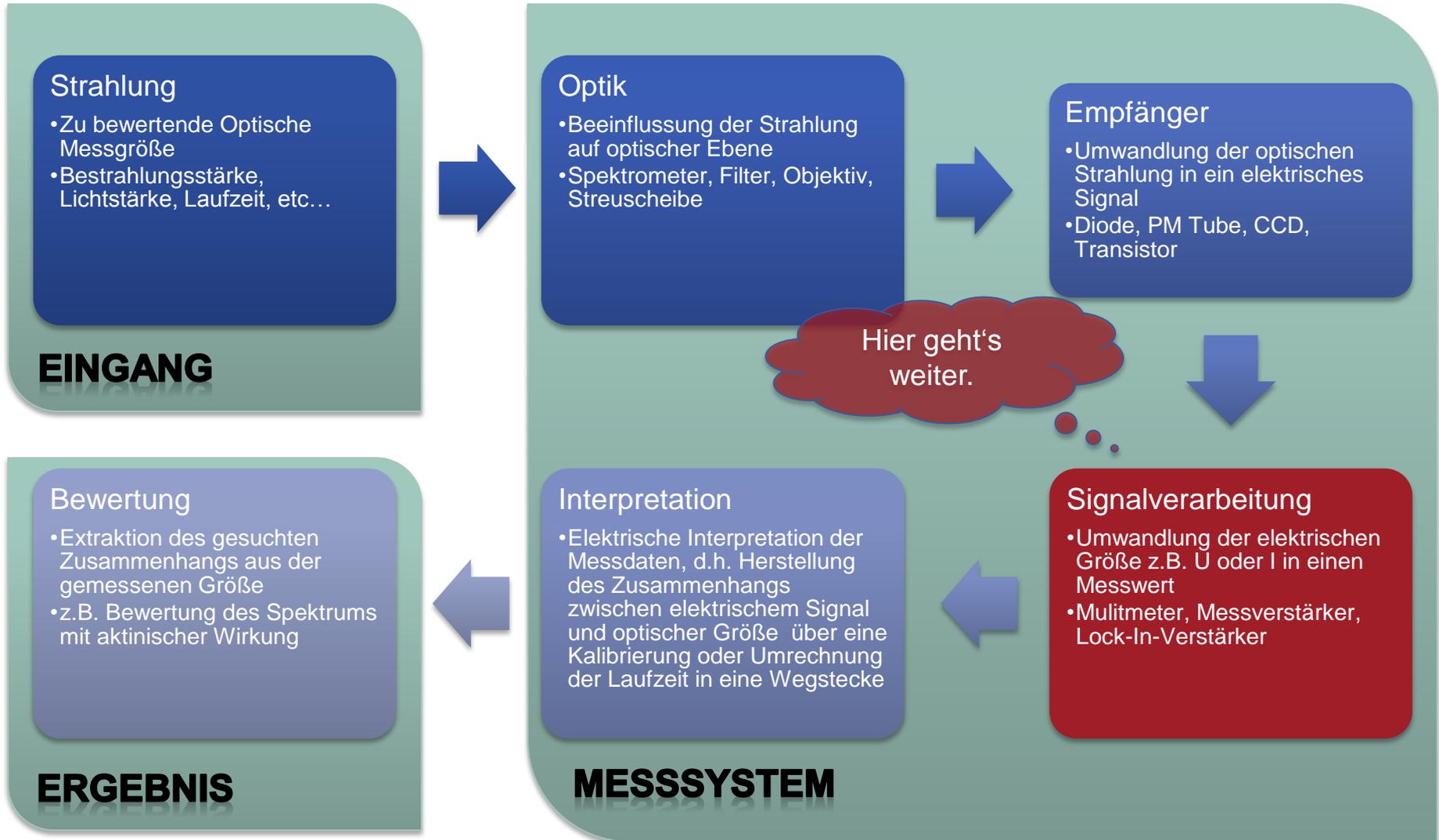
- Bei niedrigen Photonenzahlen haben APDs ein besseres SNR.
- Bei hohen Photonenzahlen rauscht die Photodiode weniger

Abhängigkeit des SNR von der Bandbreite für unterschiedliche Verstärkertypen (doppellogarithmische Auftragung)



- Bei hohen Bandbreiten limitiert oft das Verstärkerrauschen das SNR

Prinzipieller Aufbau eines Messsystems



Techniken zum Anheben des SNR

Voraussetzung: Das eigentliche Messsignal ist zeitlich konstant oder streng wiederholbar (nicht unbedingt periodisch).

Verfahren: Das gemessene Signal zusammengesetzt aus dem eigentlichen Signal $s(t)$ und der überlagerten Rauschkomponente $n(t)$ wird m -fach abgetastet zu Zeiten t_k+pT , $t_{k+1}+pT, \dots$, zu denen dieselben Signalamplituden anstehen:

$$u(t) = s(t) + n(t)$$

$$s(t_k + pT) = s(t_{k+1} + pT) = s(t_{k+2} + pT) = \dots \equiv s(pT) \quad k = 1, \dots, m, 0 < p < 1$$

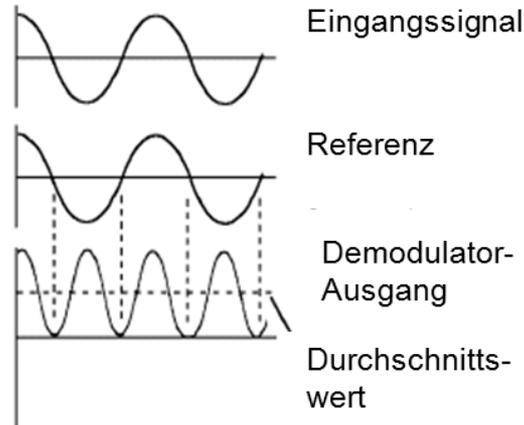
$$\sum_{k=1}^m u(t_k + pT) = \sum_{k=1}^m s(pT) + \sum_{k=1}^m n(t_k + pT) = m \cdot s(pT) + (m \cdot \rho^2)^{1/2}$$

ρ ist der Effektivwert der Rauschgröße einer einzelnen Abtastung und die Summe der Rauschbeiträge von m Abtastungen ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate von ρ .

$$\left(\frac{S}{N} \right)_m = \frac{m \cdot s(pT)}{(m \cdot \rho^2)^{1/2}} = m^{1/2} \left(\frac{S}{N} \right)_1$$

Signal-Rauschverhältnis $(S/N)_m$, erhalten durch Mittelung von m Messwerten, ist **um den Faktor $m^{1/2}$** gegenüber dem der Einzelmessung **gehoben**.

Phasensensitive Detektion

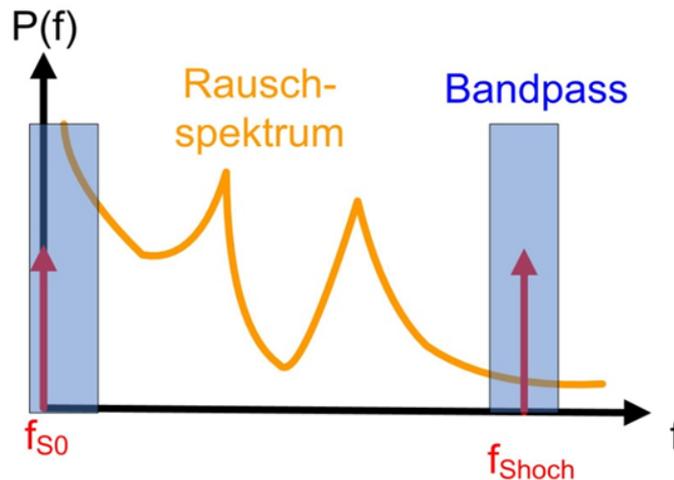


Phasenrichtige Mischen von zwei Sinus-Signalen gleicher Frequenz

→ Konstantes Signal proportional zu den Signalamplituden

$$U_A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} U_{S,m} \cos \varphi_m$$

→ Rauschen kann durch Tiefpassfilterung (fast) eliminiert werden, da die Rauschanteile sich in **keiner** festen Phasenbeziehung zum Signal befinden



Strategie zur Messung

1. Modulation des Signals (z.B. über Chopper)
2. Phasensensitive Detektion (z.B. mit Lock-In-Verstärker)

Chopper

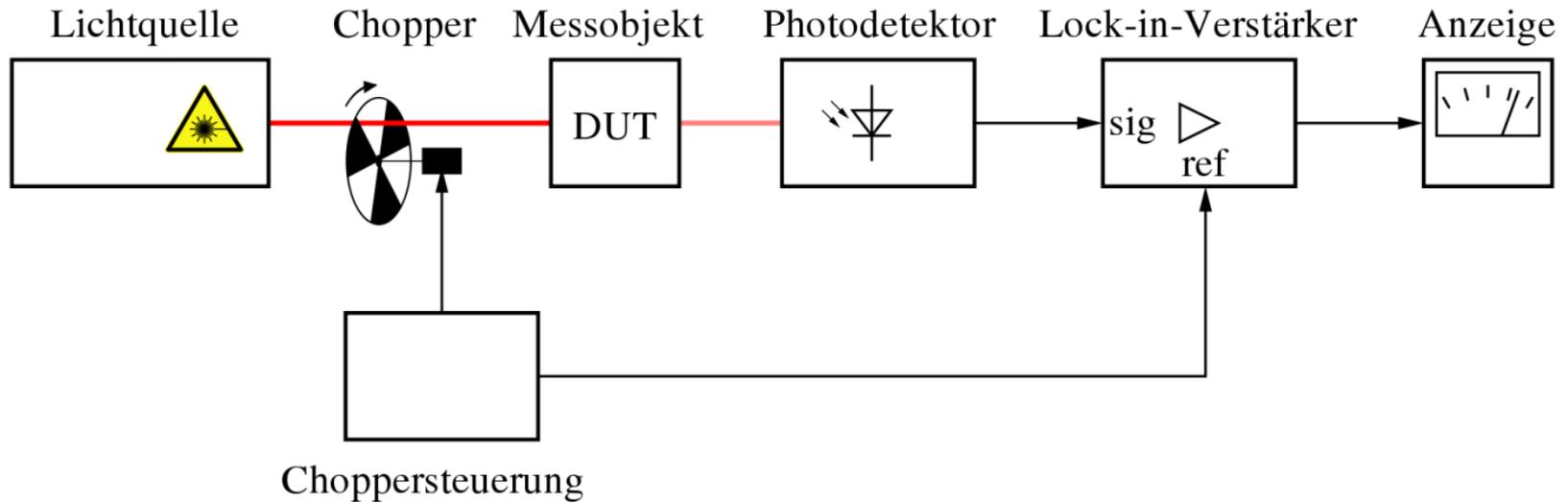


Chopper Rad



- Optischer Chopper
 - Modulationsfilter mit reiner Torfunktion
 - Rechteckförmige Signalmodulation (an / aus)
- Referenzfrequenz abhängig von
 - Lochmuster
 - Drehfrequenz
- Weitergabe der Modulationsfrequenz über direkten Abgriff des Tors (Lichtschanke)
- Frequenzbereich (1Hz bis ca. 1 kHz)
- Achtung wähle nie ein direktes Vielfaches der Netzfrequenz (Schwebung)

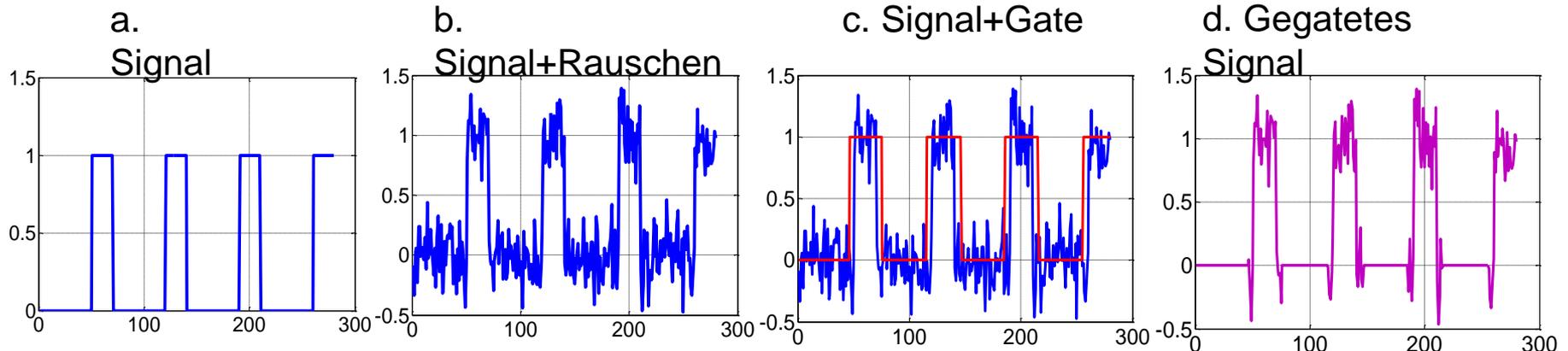
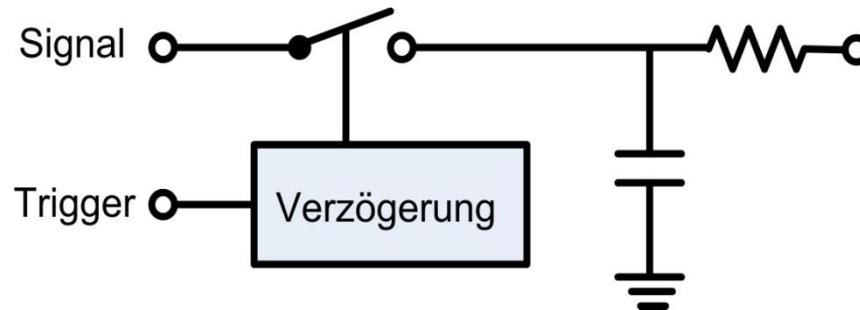
Prinzip Schaltung Chopper | Lock in



- **Optischer Chopper**
 - Modulationsfilter mit reiner Torfunktion
 - Rechteckförmige Signalmodulation (an / aus)
- Weitergabe der Modulationsfrequenz über direkten Abgriff des Tors (Lichtschanke)

Boxcar-Integrator

Tor schaltet empfangenes Signal für eine gewisse Zeit T_g und verzögert um eine gewählte Zeit $p \cdot T$ N-fach wiederholt auf einen Tiefpass mit Zeitkonstante $R \cdot C$. Er wird dimensioniert $T_g \approx R \cdot C$!



Boxcar-Integrator und Multichannel Averager

Damit wird ein sog. **gewichtetes Mittel** (kein arithmetischer Mittelwert) gebildet.
Erhöhung des SNR:

- durch Gating T/T_G
- Mitteln über N Pulse $(N)^{1/2}$

Signal-Rauschverhältnis ist dadurch angehoben um den Faktor $(N \cdot RC / T_g)^{1/2}$.

Scan-Mode

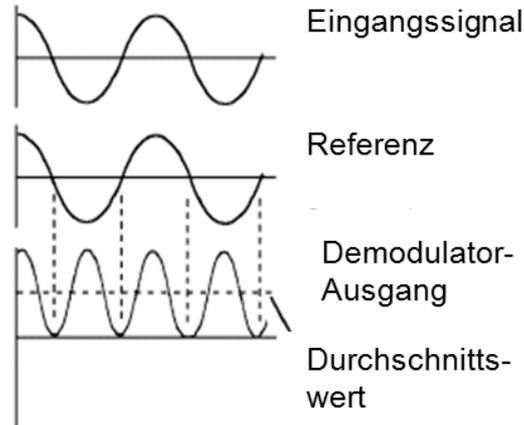
Um den ganzen zeitlichen Verlauf eines i. d. R. zeitlich kurzen, wiederholbaren Signals zu erfassen, wird das Delay nach jeweils m Abtastungen stückweise erhöht.

Vielkanal-Mittelung

n unterschiedliche Signalamplituden werden gleichzeitig abgetastet und dies wird m-mal wiederholt. Vorteil: kürzere Messzeit!

Einsatz digitaler Signalerfassung ermöglicht driftfreie Speicherung und Akkumulation und Division in einem Zyklus.

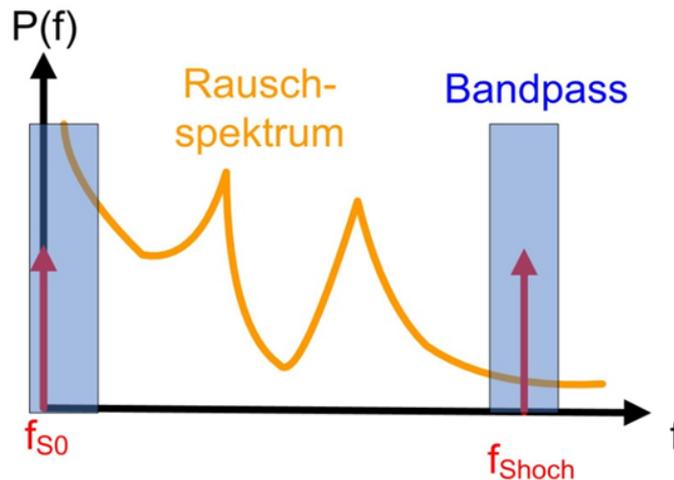
Phasensensitive Detektion



Phasenrichtige Mischen von zwei Sinus-Signalen gleicher Frequenz
 → Konstantes Signal proportional zu den Signalamplituden

$$U_A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} U_{S,m} \cos \varphi_m$$

→ Rauschen kann durch Tiefpassfilterung (fast) eliminiert werden, da die Rauschanteile sich in **keiner** festen Phasenbeziehung zum Signal befinden



Strategie zur Messung

1. Modulation des Signals (z.B. über Chopper)
2. Phasensensitive Detektion (z.B. mit Lock-In-Verstärker)

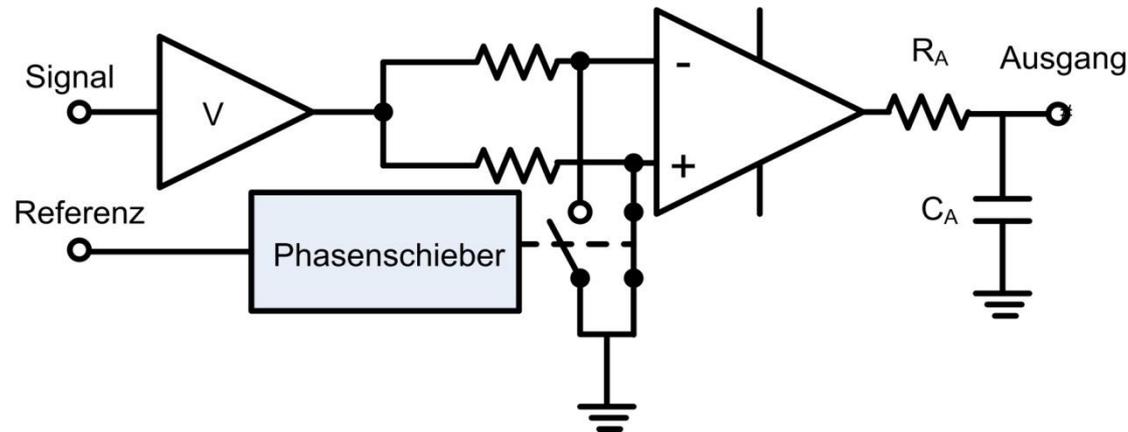
Lock-in Verstärker



- Arten
 - Analog
 - Digital
 - Hochfrequenz (MHz)
 - Niedrige Frequenz (Hz- kHz)
- Eingänge
 - Direkter Signaleingang
 - Differenzsignal
 - Stromquelle
 - Referenzsignal vom Chopper (TTL, 10V)
- Ausgänge
 - Aufbereitetes Rohsignal
 - Phasensensitives Signal
 - Invertiertes Phasensensitives Signal



Square Wave Mixer



- Abhängig von der Phase eines steuernden Referenzsignals U_{Ref} wird das Messsignal U_{Sig} unverändert oder invertiert auf einen mittelwertbildenden Tiefpass gegeben.

$$T_{\text{Ref}} \ll \tau_A = R_A \cdot C_A$$

Funktionsprinzip – Square Wave

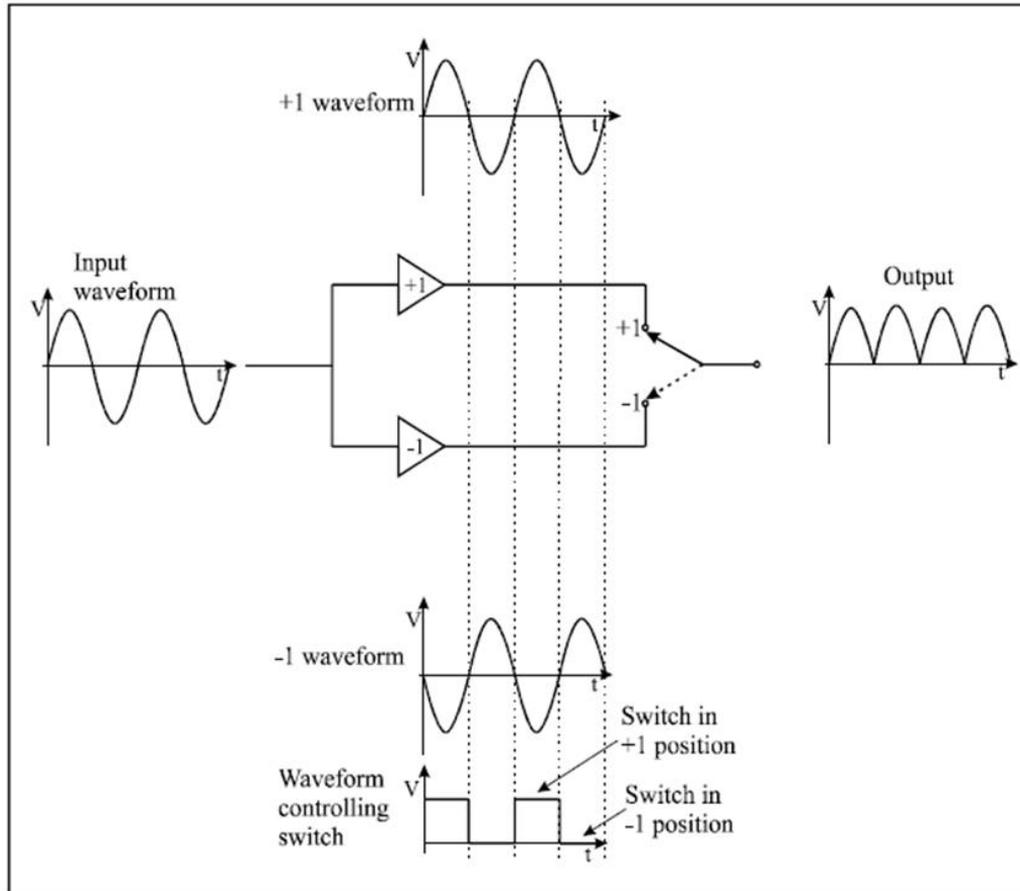


Fig 8

Das sinusförmige Signal habe die Frequenz $m \cdot \omega_R$, wobei m ein Vielfaches der Frequenz des rechteckförmigen Referenzsignals ist. Dann ist $U_A = \langle U_S \rangle$ (arithm. Mittelwert) für $m = 1$ und $\varphi_1 = 0$!

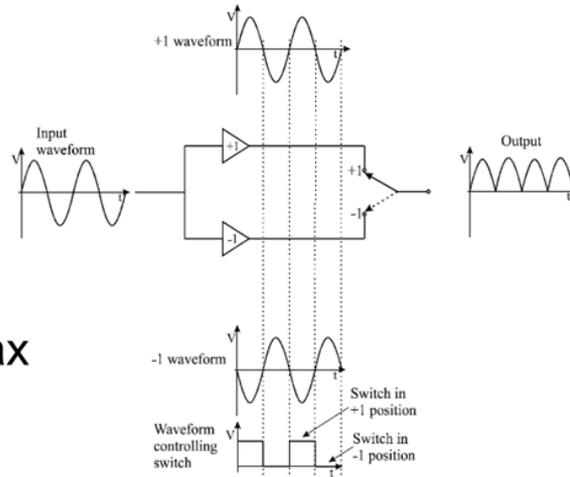
$$U_A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} U_{S,m} \cos \varphi_m$$

Ausgangssignal U_A abhängig von der Phasenverschiebung φ_m von U_S gegen U_R !

Verhalten des Square Wave

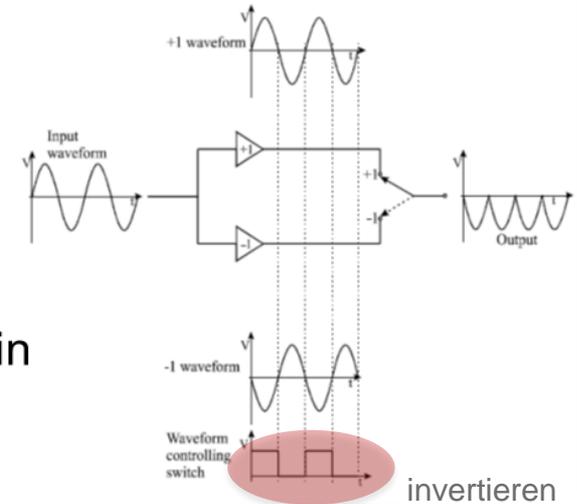
$$\varphi = 0^\circ$$

$$U_{a,mean} = \max$$



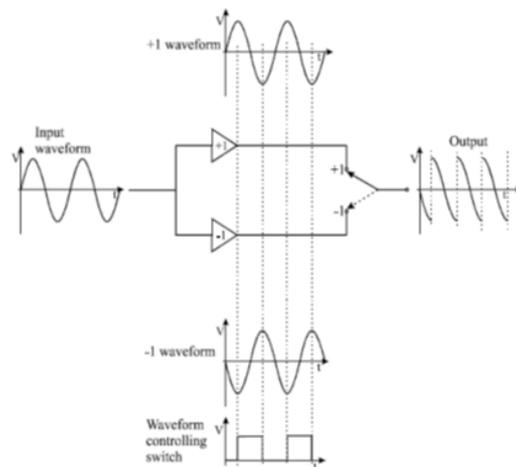
$$\varphi = 180^\circ$$

$$U_{a,mean} = \min$$



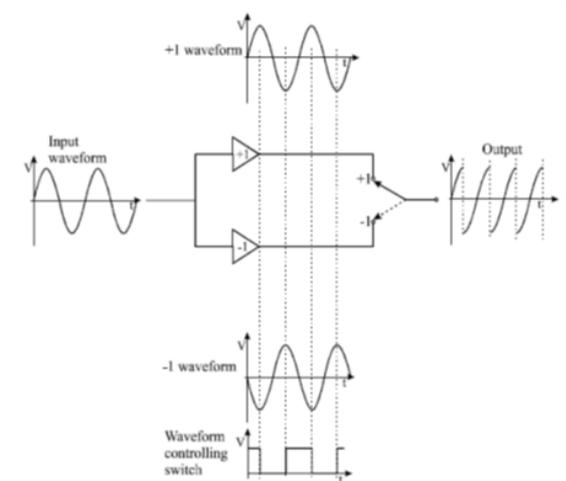
$$\varphi = 90^\circ$$

$$U_{a,mean} = 0$$



$$\varphi = 270^\circ$$

$$U_{a,mean} = 0$$

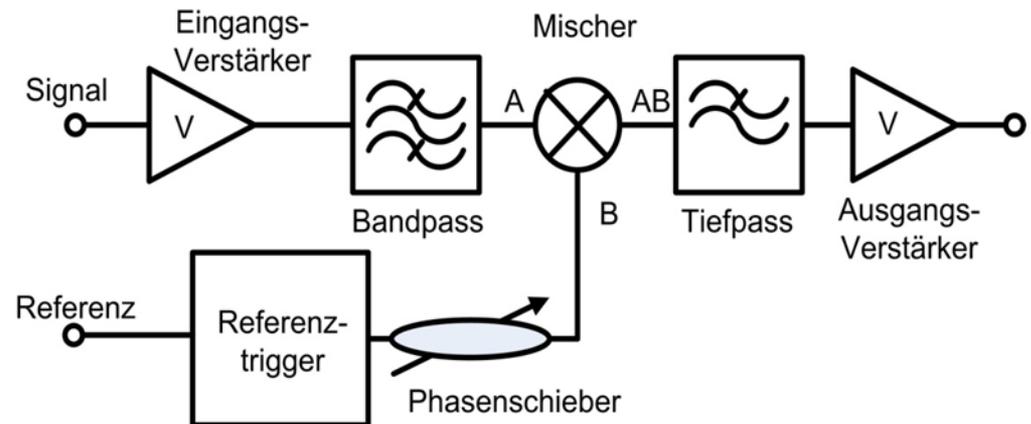


Phasensensitive Detektion – Lock-In-Detektor

Der Lock-in-Verstärker ist das Standardwerkzeug für phasensensitive Detektion im optischen (→ Heterodyn-Empfang)

Referenzschaltkreis „lockt“ auf die Signalfrequenz (meist beide aus derselben Quelle) → extrem kleine Filterbandbreiten (keine Signaldrift)

→ Gütefaktoren für Filter > 100.000 (selten mehr als 50 für gewöhnliche Filter)



Lock-in (kohärente) Detektion – Teil 2

Rauschäquivalente Bandbreite des Lock-in:

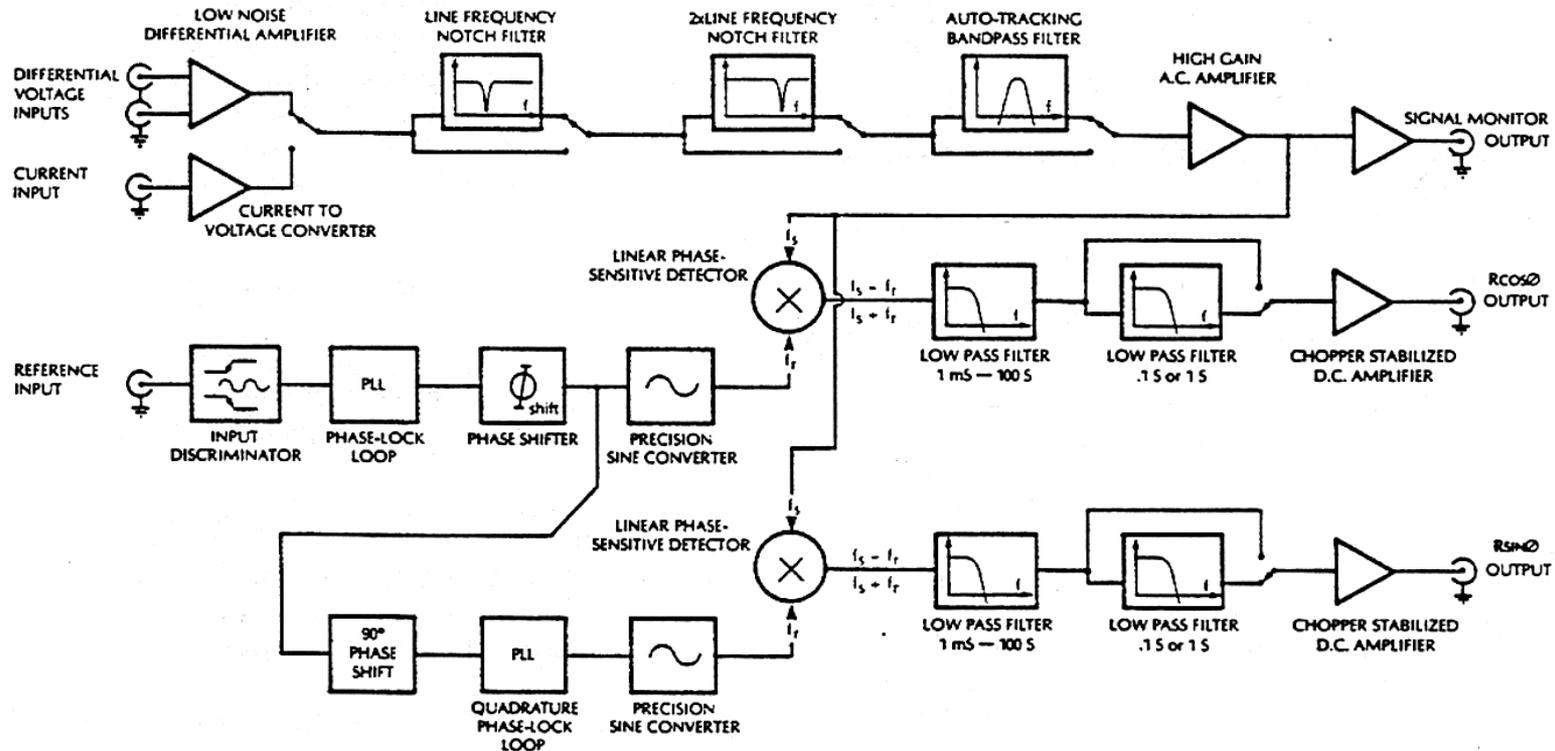
$$NEBW = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} df = \frac{1}{4RC}$$

Lock-in wirkt wie ein Filter 2. Ordnung, dessen Mittenfrequenz auf die Modulationsfrequenz ωR **verriegelt** ist.

Wenn das Signal mit derselben Frequenz wie das Referenzsignal moduliert wird, kann die Filterbandbreite im Gegensatz zu (aktiven) LRC-Filtern sehr klein, die Güte Q ($\geq 10\,000$) sehr hoch eingestellt werden. Nachteil des **square-wave mixer**: Alle ungeradzahigen Harmonischen der Referenzfrequenz werden auch übertragen. Abhilfe: **sine-wave-mixer**

Heterodyn-Verfahren: Phasenbezogenes Referenzsignal wird in einen Sinus umgesetzt und mit dem Signal multipliziert und die Summenfrequenz $f_S + f_R$ mit einem Tiefpass herausgefiltert.

Analoges Schaltbild eines Lock in



- Filter für diverse Frequenzen
- Besonders Problem – Netzfrequenz (50 Hz) und zweite Harmonische
- Ausgang für $R \cdot \cos(\Phi)$ und $R \cdot \sin(\Phi)$
- Eingang für Spannungs- und Stromquellen